Unendliche Mengen - Schreibweise

Die Zahlen 5, 9, 13, 17, 21 , … haben die Eigenschaft, dass sie ungerade natürliche Zahlen sind und dass die um 1 kleinere Zahl durch 4 teilbar ist (5-1 ist durch 4 teilbar, 9-1 ist durch 4 teilbar, …). Es gibt unendlich viele Zahlen mit dieser Eigenschaft. Deshalb können wir die Menge, die genau diese Zahlen enthält, nicht aufschreiben, indem wir die Zahlen einfach aufzählen (das würde ja unendlich lange dauern). Stattdessen kann man die Menge wie folgt notieren:

$$\{x \in \mathbb{N} | x \text{ ist ungerade und } x - 1 \text{ ist durch 4 teilbar}\}$$

„für die gilt: “

„Alle natürlichen Zahlen x,“

Welche Variable man verwendet, spielt natürlich keine Rolle. Man könnte statt x auch a verwenden und erhält die gleiche Menge:

$$\{a \in \mathbb{N} | a \text{ ist ungerade und } a - 1 \text{ ist durch 4 teilbar}\}$$

Die Eigenschaft, dass a eine natürliche Zahl sein soll, kann auch hinter „|“ notiert werden:

$$\{a | a \in \mathbb{N} \text{ und } a \text{ ist ungerade und } a - 1 \text{ ist durch 4 teilbar}\}$$

Wir wollen nun die Schreibweise verkürzen. Kümmern wir uns zuerst um die Eigenschaft „a ist ungerade“. Jede ungerade Zahl a kann mit Hilfe einer anderen Zahl k geschrieben werden als: $a = 2k + 1$. Zum Beispiel: $5 = 2 \cdot 2 + 1$ oder $11 = 2 \cdot 5 + 1$. Statt „a ist ungerade“ kann man also schreiben „Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass gilt: $a = 2k + 1$“. Das ist jetzt noch nicht wirklich kürzer. Ersetzt man aber „Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass gilt: “ mit „$\exists k \in \mathbb{N}$:“ (wie es einige Mathematiker gerne tun), erhält man:

$$\{a \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}: a = 2k + 1 \text{ und } a - 1 \text{ ist durch 4 teilbar}\}$$

Die Eigenschaft „$a - 1$ ist durch 4 teilbar“ lässt sich kürzer so schreiben: „$4 | a - 1$“ (4 teilt $a - 1$)
Man erhält:

$$\{a \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N}: a = 2k + 1 \; und \; 4 | a - 1\}$$

Ersetzt man jetzt das „und“ durch das Symbol „∧“ erhält man:

$$\{a \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}: a = 2k + 1 \wedge 4 | a - 1\}$$

(sieht ganz schön kompliziert aus, was?)

Bisher haben wir die Menge so beschrieben „Alle natürlichen Zahlen, die ungerade sind und deren Vorgänger durch 4 teilbar ist“. Die gleiche Menge kann man aber auch so beschreiben: „Alle ungeraden natürlichen Zahlen, deren Vorgänger durch 4 teilbar ist.“ In Mengenschreibweise sieht das dann so aus:

$$\{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N} \; \wedge 4 | 2k\}$$

AUFGABEN

Du hast jetzt 7 Möglichkeiten kennengelernt, ein und dieselbe Menge aufzuschreiben. Nun bist du dran!

1) Schreibe als Menge:
   a) Alle ganzen Zahlen, die durch 5 teilbar sind
   b) Alle Zahlen, die zwischen -99 und 80 liegen außer der Null.

2) Schreibe 5 Zahlen auf, die in der folgenden Menge enthalten sind:
   a) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < -4 \; \wedge x > -6\}$
   b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \; und \; 6 \mid x \cdot 3\}$