Das Summenzeichen

EINSTIEG

Will man viele Zahlen addieren, zum Beispiel alle Zahlen von 1 bis 100, so muss man ganz schön viel schreiben:

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20+21+22+23+24+25+26+27+28+29+30+31+32+33+34+35+36+37+38+39+40+41+42+43+44+45+46+47+48+49+50+51+52+53+54+55+56+57+58+59+60+61+62+3+64+65+66+67+68+69+70+71+72+73+74+75+76+77+78+79+80+81+82+83+84+85+6+87+88+89+90+91+92+93+94+95+96+97+98+99+100

(ist übrigens 5050, bevor ihr jetzt anfangt zu rechnen…;))

Kürzer kann man diese Summe so aufschreiben:

Dieses Ding (übrigens ein großes Sigma) wird „Summenzeichen“ genannt.

$$\sum_{k=1}^{100} k$$

In den folgenden Beispielen erkennt man vielleicht schon, wie das Summenzeichen funktioniert. Weiter unten folgt eine ausführliche Erklärung.

BEISPIELE

1. Beispiel:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=\sum_{k=1}^{10} k$$

Für k werden die Zahlen **1** bis **10** eingesetzt

2. Beispiel:

$$3+4+5+6=\sum_{j=3}^{6} j$$

Für j werden die Zahlen **3** bis **6** eingesetzt

3. Beispiel:

$$4+6+8+10=2\cdot\mathbf{2}+2\cdot\mathbf{3}+2\cdot\mathbf{4}+2\cdot\mathbf{5}=\sum_{k=2}^{5} 2k$$

Für k werden die Zahlen **2** bis **5** eingesetzt

ERKLÄRUNG

$$\sum_{i=5}^{12}(i^2-1)$$

1 Das Summenzeichen gibt an, dass eine Summe gebildet werden muss. Ha! Wer hätte das gedacht? Das Produktzeichen sieht übrigens so aus: $\prod$

2 Dieser Buchstabe ist der so genannte Laufindex. Für diesen Laufindex soll man in den rechts stehenden Term (i^2-1) nacheinander die natürlichen Zahlen von 5 bis 12 einsetzen.

3 Das ist der Startwert. Die erste Zahl, die man für i einsetzen muss, ist also die 5.

4 Das ist der Endwert. Man setzt für i also nacheinander die Zahlen 5,6,7,8,9,10,11,12 ein.

5 Das ist der Term. Für i setzt man nun nacheinander die entsprechenden Zahlen ein. Du beginnst also mit 5: $5^2-1=\mathbf{24}$. Als nächstes kommt die 6: $6^2-1=\mathbf{35}$. Und so weiter. Diese Zahlen muss du natürlich noch addieren (aufgrund des Summenzeichens). Du erhältst:

$$\sum_{i=5}^{12} i^2-1=\mathbf{24}+\mathbf{35}+48+63+80+99+120+143=612$$

Auf der Rückseite wird auf spezielle Fälle sowie die Doppelsumme eingegangen. Am Ende befinden sich Übungsaufgaben.

SPEZIALFÄLLE

- Natürlich können noch **weitere Variablen** auftauchen, die aber nicht verwirren sollten.

$$\sum_{m=4}^{5} 2m + n = (2\cdot 4 + n) + (2\cdot 5 + n) = 8 + n + 10 + n = 18 + 2n$$

Unter dem Summenzeichen sieht man, welche Variable die Laufvariable ist.

- Auf den ersten Blick sinnlos, aber manchmal nützlich:

$$\sum_{i=10}^{10} i^3 = 10^3 = 1000$$

Für i sollen die Zahlen von 10 bis 10 eingesetzt werden. Also nur die 10.

- Häufig ist die **Indexverschiebung** hilfreich:

$$\sum_{k=1}^{3} 3k = \sum_{k=2}^{?} ?$$

Bei der linken Summe wird für k als erstes die 1 eingesetzt. Bei der rechten Summe wird für k als erstes die 2 eingesetzt. Wie muss der Term und der Endwert verändert werden, damit beide Summen dennoch gleich sind?

Lösung:

$$\sum_{k=2}^{4} 3(k-1)$$

Warum? Wir schauen uns die linke und die rechte Summe genauer an:

$$\sum_{k=1}^{3} 3k = 3 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3 = 18$$

$$\sum_{k=2}^{4} 3(k-1) = 3(2-1) + 3(3-1) + 3(4-1) = 3 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3 = 18$$

Offensichtlich sind die beiden Summen gleich.

DOPPELSUMMEN

Eine **Doppelsumme** sieht zum Beispiel so aus:

$$\sum_{k=3}^{4}\sum_{j=4}^{6} 2^j \cdot k$$

Beim Berechnen kümmert man sich zunächst um die „innere Summe" $\sum_{j=4}^{6} 2^j \cdot k$ und ignoriert die vordere völlig:

$$\sum_{k=3}^{4}\sum_{j=4}^{6} 2^j \cdot k = \sum_{k=3}^{4} (2^4\cdot k + 2^5\cdot k + 2^6\cdot k)$$

Jetzt hat man nur noch ein Summenzeichen und kann wie gewohnt weitermachen:

$$\sum_{k=3}^{4} (2^4\cdot k + 2^5\cdot k + 2^6\cdot k) = (2^4\cdot 3 + 2^5\cdot 3 + 2^6\cdot 3) + (2^4\cdot 4 + 2^5\cdot 4 + 2^6\cdot 4)$$

Das Ausrechnen sei dem Taschenrechner überlassen ;)

Weiter geht`s mit Übungsaufgaben.

AUFGABEN

1. Ergänze die fehlenden Angaben!

$a)\ 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = \sum_{k=} k^2$

$b)\ 0 + 3 + 8 + 15 + 24 + 35 = \sum_{i=} i^2 -$

2. Berechne die Summe!

$a)\ \sum_{k=1}^{6} 2k + 1 =$

$b)\ \sum_{m=1}^{4} 2^m =$

3. Zeige, dass folgende Gleichung gilt, indem du die linke und die rechte Seite ausrechnest!

$$\sum_{j=0}^{5} 5j = \sum_{j=1}^{5} 5j$$

4. Führe eine Indexverschiebung durch!

$$\sum_{p=3}^{10} (p+1)^3 = \sum_{p=4}^{?} ?$$

5. Berechne die Doppelsumme!

$$\sum_{p=0}^{2}\sum_{q=1}^{3} pq^2 =$$

6. Zeige, dass folgende Gleichung gilt, indem du beide Seiten ausrechnest!

$$\sum_{k=1}^{4} 2k + \sum_{k=1}^{4} 3k = \sum_{k=1}^{4} 5k$$