1. Kommutativgesetz anwenden

Wie kann der Term $5a \cdot 4$ vereinfacht werden?

Ich kenne die Lösung!

Lösung:

Ich kenne die Lösung nicht und will ein Beispiel sehen!

Beispiel: $2x \cdot 3$

- Produkt ausführlich aufschreiben:
  $$2x \cdot 3 = 2 \cdot x \cdot 3$$
- Kommutativgesetz für die Multiplikation anwenden:
  $$2 \cdot x \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot x$$
- Zahlen multiplizieren:
  $$2 \cdot 3 \cdot x = 6 \cdot x$$
- Schreibweise verkürzen:
  $$6 \cdot x = 6x$$

Zurück zur Anfangs-Aufgabe: $5a \cdot 4$

Lösung:

Beispielaufgaben

$\mathbf{6a \cdot 4b}$	$\mathbf{2 \cdot 4m \cdot \left(\frac{1}{4}n\right)}$	$\mathbf{\frac{2}{3} \cdot r \cdot 9sp}$
$6a \cdot 4b = 6 \cdot a \cdot 4 \cdot b = 6 \cdot 4 \cdot a \cdot b = 24 \cdot a \cdot b = 24ab$	$2 \cdot 4m \cdot (\frac{1}{4}n) = 2 \cdot 4 \cdot m \cdot \frac{1}{4} \cdot n = 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot m \cdot n = 2 \cdot m \cdot n = 2mn$	$\frac{2}{3} \cdot r \cdot 9sp = \frac{2}{3} \cdot r \cdot 9 \cdot s \cdot p = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot p \cdot r \cdot s = 6 \cdot p \cdot r \cdot s = 6prs$
Merken: Buchstaben alphabetisch ordnen!	**Merken:** Die Klammern können beim Multiplizieren weggelassen werden (Assoziativgesetz).	

Vereinfachen Sie die Terme wie in den Beispielaufgaben!

a) $30 \cdot 8a$ b) $\frac{1}{2}xy \cdot 0{,}5z$ c) $2 \cdot (x \cdot 15)$

Platz für eigene Notizen:

2. Achtung Vorzeichen!

Wie kann der Term $(-4x) \cdot 5$ vereinfacht werden?

Ich kenne die Lösung!

Lösung:

Ich kenne die Lösung nicht und möchte ein Beispiel sehen!

Beispiel: $(-2x) \cdot 3$

- $-2x$ kann ausführlich so geschrieben werden:
  $$-2x = (-2) \cdot x$$
- Das ganze Produkt ausführlich aufschreiben:
  $$(-2x) \cdot 3 = (-2) \cdot x \cdot 3$$
- Kommutativgesetz anwenden:
  $$(-2) \cdot x \cdot 3 = (-2) \cdot 3 \cdot x$$
- Zahlen multiplizieren und Schreibweise verkürzen:
  $$(-2) \cdot 3 \cdot x = -6x$$

Zurück zur Anfangs-Aufgabe: $(-4x) \cdot 5$

Lösung:

Beispielaufgaben

$-2 \cdot (-3x)$	$-a \cdot 2b$	$-6xy \cdot (-2z) \cdot (-3w)$	$2(-x) \cdot (-1)$
$= (-2) \cdot (-3) \cdot x$ $= 6 \cdot x$ $= 6x$	$= -1a \cdot 2b$ $= (-1) \cdot 2 \cdot a \cdot b$ $= -2 \cdot a \cdot b$ $= -2ab$	$= -6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot w \cdot xy \cdot z$ $= -36 \cdot w \cdot x \cdot y \cdot z$ $= -36wxyz$	$= +2 \cdot 1 \cdot x$ $= 2x$
	Merken: -x = -1x	**Trick:** Erst das Vorzeichen ermitteln (durch Zählen der Minuszeichen).	

Vereinfachen Sie die Terme wie in den Beispielaufgaben!

a) $-3 \cdot (-4ab)$ **b)** $-x \cdot 6y$ **c)** $-3a \cdot (-5c) \cdot (-2b)$

d) $(-0{,}5) \cdot (-2y^2)$ **e)** $-6 \cdot (-x) \cdot (-5zy) \cdot (-1)$ **f)** $3(-a) \cdot 8b$

Platz für eigene Notizen:

3. Potenzen über Potenzen

Wiederholung:
Produkte aus gleichen Faktoren lassen sich als Potenzen mit den Exponenten 2; 3; 4; 5; … schreiben: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
Gleiches gilt für Variablen: $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$

Schreiben Sie mit Hilfe von Potenzen! $x \cdot x =$ $m \cdot m \cdot m \cdot m =$

Man kann Potenzen multiplizieren, indem man sie zunächst als Produkte schreibt:
$$2^2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$
genauso mit Variablen: $a^4 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$

Multiplizieren Sie die Potenzen! $x^2 \cdot x^2 \cdot x^3 =$ $y \cdot y^4 =$

Wie kann der Term $3yx \cdot y$ vereinfacht werden?

Ich kenne die Lösung!

Lösung:

Ich kenne die Lösung nicht und möchte ein Beispiel sehen!

Beispiel: $\boldsymbol{2ab \cdot a}$

- Mit den bisherigen Kenntnissen umformen:
  $$2ab \cdot a = 2 \cdot a \cdot a \cdot b$$
- Mit Potenzen zusammenfassen:
  $$2 \cdot a \cdot a \cdot b = 2a^2b$$

Zurück zur Anfangs-Aufgabe: $3\mathrm{yx} \cdot y$
Lösung:

Beispielaufgaben

$\mathbf{8a^2b \cdot (-3ad)}$	$\mathbf{-0,5x \cdot (-2x)}$	$\mathbf{(-2x)^2x}$
$= -8 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a \cdot b \cdot d$ $= -24 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot d$ $= -24a^3bd$	$= +0,5 \cdot 2 \cdot x \cdot x$ $= 1 \cdot x \cdot x$ $= 1\mathrm{x}^2$ $= x^2$ **Merken:** x=1x	$= (-2\mathrm{x}) \cdot (-2\mathrm{x}) \cdot x$ $= +2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x$ $= 4\mathrm{x}^2 \cdot x$ $= 4\mathrm{x}^3$ **Merken:** $(\mathrm{ab})^\mathrm{n} = (\mathrm{ab}) \cdot (\mathrm{ab}) \cdot \ldots \cdot$ $= \mathrm{a}^\mathrm{n} \cdot \mathrm{b}^\mathrm{n}$

Vereinfachen Sie die Terme wie in den Beispielaufgaben!

a) $3\mathrm{pq}^2 \cdot (-2\mathrm{p})$ **b)** $0,25x^2 \cdot (-4\mathrm{xy})$ **c)** $(3\mathrm{x})^2 \cdot x$

Platz für eigene Notizen:

4. Distributivgesetz anwenden

Wie kann der Term $2a^2 + 4a^2$ vereinfacht werden?

Ich kenne die Lösung!

Lösung:

Ich kenne die Lösung nicht und will ein Beispiel sehen!

Beispiel: $2\boldsymbol{x}^3 + 3\boldsymbol{x}^3$

- Produkt ausführlich schreiben:
  $2x^3 + 3x^3 = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^3$
- Distributivgesetz anwenden:
  $2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^3 = (2 + 3) \cdot x^3$
- Zahlen addieren:
  $(2 + 3) \cdot x^3 = 5 \cdot x^3$
- Schreibweise verkürzen:
  $5 \cdot x^3 = 5x^3$

Zurück zur Anfangs-Aufgabe: $2a^2 + 4a^2$

Lösung:

Beispielaufgaben

$\boldsymbol{6ab - 2a + 4ba - a}$ $= 6ab - 2a + 4ab - a$ $= 6ab + 4ab - 2a - a$ $= 10ab - 3a$	$\boldsymbol{-(-3xyx) + (-2x^2y) - xy^2}$ $= 3xyx - 2x^2y - xy^2$ $= 3x^2y - 2x^2y - xy^2$ $= 1x^2y - xy^2$ $= x^2y - xy^2$	$\boldsymbol{4cbc^2 - (+3c^2bc - bc)}$ $= 4cbc^2 - 3c^2bc + bc$ $= 4bc^3 - 3bc^3 + bc$ $= 1bc^3 + bc$ $= bc^3 + bc$
Merken: Alle Summanden mit gleichen Variablen zusammenfassen.	**Merken:** $-(-a) = +a$ $+(-a) = -a$ $-(+a) = -a$ $+(+a) = +a$	**Merken:** Steht ein Minus vor der Klammer → Alle Vorzeichen umdrehen

Vereinfachen Sie die Terme wie in den Beispielaufgaben!

a) $-21kl - 3k + l + kl - l$ **b)** $-(-2s^2f) + (2fss)$ **c)** $+pq^2p^2 - (qp^3q + (-2q))$

Platz für eigene Notizen:

5. Ausmultiplizieren

Wie kann der Term $5a \cdot (2a + 3b)$ vereinfacht werden?

Ich kenne die Lösung!

Lösung:

Ich kenne die Lösung nicht und will ein Beispiel sehen!

Beispiel: $2\boldsymbol{x} \cdot (3y + 4x)$

- Der Faktor vor der Klammer muss mit jedem Summanden in der Klammer multipliziert werden:

$$2x \cdot (3y + 4x) = 2x \cdot 3y + 2x \cdot 4x$$

- Wie bekannt zusammenfassen:
  $2x \cdot 3y + 2x \cdot 4x = 6xy + 8x^2$

Zurück zur Anfangs-Aufgabe: $5a \cdot (2a + 3b)$
Lösung:

Beispielaufgaben

$6\boldsymbol{ab} \cdot (1 + \boldsymbol{ab}) + 2\boldsymbol{ab}$	$(\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^2 + 3\boldsymbol{x}) \cdot 2\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{e}(3\boldsymbol{f} + \boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{e} + \boldsymbol{f}) + 4\boldsymbol{f})$
$= 6ab \cdot 1 + 6ab \cdot ab + 2ab$ $= 6ab + 6a^2b^2 + 2ab$ $= 8ab + 6a^2b^2$	$= (4x - 2x^2) \cdot 2x$ $= 4x \cdot 2x - 2x^2 \cdot 2x$ $= 8x^2 - 4x^3$	$= e(7f + e \cdot (e + f))$ $= e(7f + e^2 + ef)$ $= e \cdot 7f + e \cdot e^2 + e \cdot ef$ $= 7ef + e^3 + e^2f$
Merken: Punkt vor Strich!	**Merken:** Wenn möglich, schon in der Klammer zusammenfassen!	**Merken:** Bei ineinander verschachtelten Klammern mit der innersten beginnen!

Vereinfachen Sie die Terme wie in den Beispielaufgaben!

a) $3x \cdot (x + 2y + 1)$ b) $(2 - a)a + 3a$ c) $2 \cdot (x(15 + 3x) - x)$

Platz für eigene Notizen:

6. Ausmultiplizieren (Achtung Vorzeichen!)

Multiplizieren Sie den Term -3h(5-k) aus!

Ich kenne die Lösung!	Ich kenne die Lösung nicht und will ein Beispiel sehen!
Lösung:	**Beispiel:** $-2a\,(5-a)$ $(-2a)\,(5-a) = (-2a)\cdot 5 - (-2a)\cdot a$ $= -10a - (-2a^2)$ $= -10a + 2a^2$ **Zurück zur Anfangsaufgabe:** $-3h(5-k)$ Lösung:

Beispielaufgaben

$-3a(a+2b)$	$-3a(-a+2b)$
$(-3a)\,(a+2b) = (-3a)\cdot a + (-3a)\cdot 2b$ $= -3a^2 - 6ab$	$(-3a)\,(-a+2b) = (-3a)\cdot(-a) + (-3a)\cdot 2b$ $= +3a^2 - 6ab$ $= 3a^2 - 6ab$
$3a(a-2b)$	$(-a-2b)3a$
$3a\,(a-2b) = 3a\cdot a - 3a\cdot 2b$ $= 3a^2 - 6ab$	$(-a-2b)\cdot 3a = (-a)\cdot 3a - (2b)\cdot 3a$ $= -3a^2 - 6ab$

Multiplizieren Sie wie in den Beispielaufgaben aus!

a) $(x^2 - y)(-2)$

b) $(-3{,}2)(5x + z)$

c) $(3u - \frac{v}{2})\cdot w$

d) $(-p)\cdot(-q-r)$

e) $w(-u^2 - 2v - v^2)$

f) $-4(-1 + xy)$

Platz für eigene Notizen

7. Multiplizieren zweier Klammern

Wie kann der Term $(5a - 2b) \cdot (3b + a)$ vereinfacht werden?

Ich kenne die Lösung!

Lösung:

Ich kenne die Lösung nicht und will ein Beispiel sehen!

Beispiel: $(2 + 3x) \cdot (x - 5)$

- Jeder Summand der ersten Klammer muss mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert werden:

$$(\ 2\ +\ 3x\ ) \cdot (\ x\ -\ 5\ )$$

$$= 2 \cdot x - 2 \cdot 5 + 3x \cdot x - 3x \cdot 5$$

- Wie gewohnt zusammenfassen:
  $2 \cdot x - 2 \cdot 5 + 3x \cdot x - 3x \cdot 5$
  $= 2x - 10 + 3x^2 - 15x$
  $= -13x - 10 + 3x^2$

Zurück zur Anfangs-Aufgabe: $(5a - 2b) \cdot (3b + a)$

Lösung:

Beispielaufgaben

$(3\boldsymbol{xy} - 2\boldsymbol{x})(1 - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ $= 3xy \cdot 1 - 3xy \cdot x + 3xy \cdot y$ $-2x \cdot 1 + 2x \cdot x - 2x \cdot y$ $= 3xy - 3x^2y + 3xy^2$ $-2x + 2x^2 - 2xy$ $= xy - 3x^2y + 3xy^2 - 2x$ $+ 2x^2$	$2(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q})(\boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q})$ $= 2(p \cdot p + p \cdot 2q - q \cdot p - q \cdot 2q)$ $= 2(p^2 + 2pq - pq - 2q^2)$ $= 2(p^2 + pq - 2q^2)$ $= 2p^2 + 2pq - 4q^2$ **Merken:** Aufgrund des Assoziativgesetzes ist es egal, ob man erst die hinteren beiden Klammern oder erst die vorderen multipliziert!	$(4\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \cdot \frac{1}{4}$ $= (4a \cdot a + 4a \cdot b - 4a \cdot c$ $-4b \cdot a - 4b \cdot b + 4b \cdot c$ $-4c \cdot a - 4c \cdot b + 4c \cdot c) \cdot \frac{1}{4}$ $= (4a^2 + 4ab - 4ac - 4ab$ $-4b^2 + 4bc - 4ac - 4bc + 4c^2) \cdot \frac{1}{4}$ $= (4a^2 - 8ac - 4b^2 + 4c^2) \cdot \frac{1}{4}$ $= a^2 - 2ac - b^2 + c^2$

Multiplizieren Sie die Klammern wie in den Beispielaufgaben!

a) $-3(a - 1 - b)(-b - a)$ **b)** $(x + 2y) \cdot (-y - (x - y))$ **c)** $2 \cdot (\frac{1}{2}k - l)(\frac{1}{2}l - 2)$

Platz für eigene Notizen:

8. Ausklammern

Mit Hilfe eines Tricks kann man die folgende Aufgabe sehr leicht im Kopf lösen:

$$23 \cdot 1985 + 1985 \cdot 56 + 3 \cdot 1985 \cdot 7$$

Erkennen Sie den Trick?

Ja

Lösung:

Berechnen Sie mit dem gleichen Trick:

$$7{,}8 \cdot \frac{1}{4} + 7{,}8 \cdot 0{,}75$$

Nein

Löst man die Aufgabe mit dem Taschenrechner, dann sieht man, dass das Ergebnis gleich $100 \cdot 1985$ ist. Warum?

Das lässt sich mit dem Distributivgesetz begründen:

$$23 \cdot 1985 + 1985 \cdot 56 + 3 \cdot 1985 \cdot 7 =$$
$$= (23 + 56 + 21) \cdot 1985$$
$$= 100 \cdot 1985 = 198500$$

Ausklammern- Was ist das?

Das Gegenteil von Ausmultiplizieren ist das Ausklammern. Da beim Ausklammern Summen in Produkte verwandelt werden, spricht man auch von *Faktorisieren*.

Wie geht das?

Ich will es selbst herausfinden

Ich will ein Beispiel sehen!

Schauen Sie sich zunächst die Beispiele an:

- $12a^2 - 20ab = 4a\,(3a - 5b)$
  „Hier wurde 4a ausgeklammert."
- $21xyz - 7xyz + 14xy^2z = 7xyz\,(3 - 1 + 2y)$
  „Hier wurde 7xyz ausgeklammert."

Was muss in den Klammern stehen?

- $18a - 6ab = 6a(\qquad\qquad)$
- $x^3 - x^2y^2 = x^2(\qquad\qquad)$
- $9m^2 - 18n + 9m = 9(\qquad\qquad)$

Beispiel: $\mathbf{12a^2 - 20ab}$

1. Ermitteln eines gemeinsamen Teilers der Zahlen:
   $12a^2 - 20ab = 4 \cdot 3a^2 - 4 \cdot 5ab$
   (4 ist gemeinsamer Teiler von 12 und 20)
2. Bestimmen weiterer gemeinsamer Faktoren. Dazu zerlegen wir die Produkte in einzelne Faktoren:
   $4 \cdot 3a^2 - 4 \cdot 5ab$
   $= 4 \cdot 3 \cdot a \cdot a - 4 \cdot 5 \cdot a \cdot b$
   (a kommt in beiden Summanden vor)
3. Die gemeinsamen Faktoren werden vor die Klammer gesetzt:
   $4 \cdot 3 \cdot a \cdot a - 4 \cdot 5 \cdot a \cdot b = 4a(3a - 5b)$

Klammern Sie alle gemeinsamen Faktoren aus!

a) $5a + 5b$

b) $xy - yz$

c) $7uv + 7uw$

d) $24a^2b - 32ab^2$

Platz für eigene Notizen:

9. Binomische Formeln

Häufiger Fehler: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

Dass das nicht stimmt, sieht man schnell an einem Beispiel:

$$(3+2)^2 = 5^2 = 25, \text{ aber } 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13 \neq 25$$

Binomische Formeln

1. Binomische Formel

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

2. Binomische Formel

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

3. Binomische Formel

$$\boldsymbol{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2}$$

Beispiele:

$(2p-q)^2 = (2p)^2 - 2\cdot 2p\cdot q + q^2 = 4p^2 - 4pq + q^2$

$(3-x)(x+3) = (3-x)(3+x) = 3^2 - x^2 = 9 - x^2$

$(u^2 + 8uv)^2 = (u^2)^2 + 2\cdot u^2\cdot 8uv + (8uv)^2 = u^4 + 16u^3v + 64u^2v^2$

$(-5a-2b)^2 = (-5a)^2 - 2\cdot(-5a)\cdot 2b + (2b)^2 = 25a^2 + 20ab + 4b^2$

$(-1+z^2)^4 = (-1+z^2)^2\cdot(-1+z^2)^2 = (1-2z^2+z^4)^2 = z^8 - 4z^6 + 6z^4 - 4z^2 + 1$

Aufgaben

Vereinfachen Sie die Terme!

a) $3x + 7y - 4x + 6y$

b) $3.2x - 4y + 8z - 0.5x + 1.5y + (-(-3z))$

c) $10x - 20y - (-5z) + (2x - 3y) - (x - 4z)$

d) $3xy + 6yz - 4yx - 2zx + 2zy + 2xy$

e) $4aba - (-3a^2b) + 12ab + 2baa - 6ba$

f) $2uv + (3vu - 4u) - (-7u)$

g) $12\left(\frac{4}{3}a + \frac{3}{4}b - \frac{7}{6}c\right) - 8\left(\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b + \frac{7}{8}c\right)$

h) $5a - ((4a - 3b) - (b - 3a) - 8a)$

i) $5a - (2b + 3(c - 2(c - a) + b) - 5a)$

j) $(5x - 2y)(y - 3x) - x(11y - 15x)$

k) $(2w - a)^2 - (2w + a)^2$

Schreiben Sie als Produkt mit mindestens zwei Faktoren!

l) $6xyz + 8xya - 12bxy$

m) $2x^2 + 4xy^2$

n) $8uv + 2wv - 6v^2$

o) $2xy^2 + 4xyz - 6x^2yw$

p) $5u(2x - 3y) - 2x + 3y$

q) $8ax + 10ay - 12bx - 15by$

r) $x^2y^2 + z^2 - 2xyz$