Chevalley-Gruppen
Justus-Liebig-Universität Gießen

Stephan Weispfenning

Mathematisches Institut
Justus-Liebig-Universität Gießen

18.03.2011

Einleitung: Lie-Algebra

Definition

Ein $\mathbb{F}$-Vektorraum L mit $L \times L \to L, (x, y) \mapsto [x, y]$, genannt die *Lie-Klammer* von x und y, heißt *Lie-Algebra über* $\mathbb{F}$, wenn gilt

(L1) $[\cdot, \cdot]$ ist bilinear,

(L2) $[x, x] = 0_L$ für alle $x \in L$ und

(L3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ für alle $x, y, z \in L$. (Jacobi-Identität)

Grundlegendes Beispiel

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{F}$-Vektorraum und $\mathrm{End}(V) = \{\varphi : V \to V \mid \varphi \text{ ist linear}\}$. Dann ist $\mathfrak{gl}(V) := (\mathrm{End}(V), +, [\cdot, \cdot])$ eine Lie-Algebra, wobei $[\varphi, \psi] := \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$ ist.

Einleitung: Darstellung

Definition

Sei L eine Lie-Algebra über $\mathbb{F}$. Eine *Darstellung* von L ist ein Homomorphismus

$$\delta : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(V),$$

wobei V ein $\mathbb{F}$-Vektorraum ist.

Definition

Sei L eine Lie-Algebra über $\mathbb{F}$. Man definiert für $x \in L$

$$\mathrm{ad}\ x : L \longrightarrow L, y \mapsto [x, y].$$

Dann ist $\mathrm{ad}\ x \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(L)$ und $\mathrm{ad} : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L)$ eine Darstellung, genannt *adjungierte Darstellung*.

Einleitung: Halbeinfache Lie-Algebra

Definition

L heißt *halbeinfach*, wenn das eindeutig bestimmte maximale auflösbare Ideal $\mathrm{Rad}(L)$ von L das Nullideal ist.
Ein Ideal heißt *auflösbar*, wenn für

$$L^{(0)} := L, \quad L^{(n)} := [L^{(n-1)}, L^{(n-1)}], 1 \leq n \in \mathbb{N}$$

ein k existiert mit $L^{(k)} = \{0\}$.

Sei von nun an L eine halbeinfache Lie-Algebra über dem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{F}$ mit $\mathrm{char}\,(\mathbb{F}) = 0$.

Einleitung: Cartan-Unteralgebra

Satz (Abstrakte Jordanzerlegung)

Es gibt für jedes $x \in L$ eindeutig bestimmte Elemente $x_s, x_n \in L$, so dass $x = x_s + x_n,\ [x_s, x_n] = 0$, $\mathrm{ad}\ x_s$ diagonalisierbar und $\mathrm{ad}\ x_n$ nilpotent ist.

Definition

Eine Unteralgebra T von L heißt *Torus*, falls für alle Elemente $x \in T$ in der abstrakten Jordanzerlegung $x = x_s$ gilt. Ein maximaler Torus heißt *Cartan-Unteralgebra von L (CSA)*. Sei im Folgenden H ein maximaler Torus von L.

Einleitung: Cartan-Zerlegung

Definition

Wir definieren für $\phi \in H^*$:

1. $L_\phi := \{x \in L \mid \forall h \in H : [h, x] = \phi(h) \cdot x\}$
2. $\Phi := \Phi(L, H) := \{\alpha \in H^* \mid L_\alpha \neq \{0_L\} \wedge \alpha \neq 0_{H^*}\}$

Cartan-Zerlegung

Für Φ gilt

$$L = H \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha \right) = L_{0_{H^*}} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha \right)$$

als $\mathbb{F}$-Vektorraum.

Einleitung: Killing-Form

Definition

Wir definieren die symmetrische Bilinearform, genannt *Killing-Form auf* L

$$\kappa : L \times L \to \mathbb{F},\ \kappa(x, y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ x \circ \mathrm{ad}\ y).$$

Bemerkung und Definition

Die Killing-Form $\kappa|_{H\times H}$ ist nicht ausgeartet. Insbesondere ist

$$\Theta_\kappa : H \to H^*,\ h \mapsto \kappa(h, \cdot)$$

ein Vektorraumisomorphismus. Bezeichne für $\alpha \in H^*$ das eindeutige Element $t_\alpha \in H$ mit $\alpha(h) = \kappa(t_\alpha, h)$.

Einleitung: Wurzelsystem

Definition

Für $\alpha \in \Phi$ ist $h_\alpha := \frac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}$.

Definition

Ein *Wurzelsystem* ist ein Tripel $(E, (\cdot,\cdot), \Phi)$ mit

1. $(E, (\cdot,\cdot))$ ist ein euklidischer Vektorraum,
2. $\Phi \subseteq E$ ist endlich mit $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{F}} = E$,
3. für alle $\alpha \in \Phi$ ist $\{c \in \mathbb{R} \mid c\alpha \in \Phi\} = \{\pm 1\}$ und
4. für alle $\alpha, \beta \in \Phi$:

$$\beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \in \Phi \qquad \text{und} \qquad \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} =: \langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Einleitung: Hauptsatz

Satz

Sei L eine halbeinfache Lie-Algebra über $\mathbb{C}$,

- H eine Cartan-Unteralgebra von L,
- $\Phi := \Phi(L, H)$ und
- $E = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq H^*$, sowie
- $(\cdot, \cdot) := (\cdot, \cdot)|_{E \times E}$ mit $(\alpha, \beta) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$.

Dann ist $(E, (\cdot, \cdot), \Phi)$ ein Wurzelsystem.

Einleitung: Wurzelbasis, universell einhüllende Algebra

Definition

Sei $(E, (\cdot,\cdot), \Phi)$ ein Wurzelsystem. $\Delta \subseteq \Phi$ heißt *Wurzelbasis*, wenn

1. Δ eine Basis von E ist und
2. für alle $\Phi \ni \beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$ entweder alle $k_\alpha \geq 0$ oder alle $k_\alpha \leq 0$ sind.

Definition

Wir definieren die *universell einhüllende Algebra* $\mathfrak{U}(L) := \mathfrak{T}(L)/J$, wobei

$$\mathfrak{T}(L) := \mathbb{F} \oplus L \oplus (L \otimes L) \oplus (L \otimes L \otimes L) \oplus \dots \text{ und}$$
$$J := \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in L \rangle$$

ist.

Existenz einer Chevalley-Basis

Proposition

Es gibt $x_\alpha \in L_\alpha$ (für alle $\alpha \in \Phi$) mit:

(a) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$.

(b) Falls $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$, $[x_\alpha, x_\beta] = c_{\alpha,\beta} x_{\alpha+\beta}$. Dann ist $c_{\alpha,\beta} = -c_{-\alpha,-\beta}$.

(c) Der Skalar $c_{\alpha,\beta}$ erfüllt

$$c_{\alpha,\beta}^2 = q(r+1)\frac{(\alpha+\beta,\alpha+\beta)}{(\beta,\beta)},$$

wobei $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ die α-Kette durch β ist.

Definition

Eine Basis $\{x_\alpha,\ \alpha \in \Phi,\ h_i,\ 1 \leq i \leq l\}$ von L, wobei die x_α wie eben gewählt und die $h_i := h_{\alpha_i}$ sind, heißt *Chevalley-Basis von* L.

Satz von Chevalley

Satz von Chevalley

Sei $\{x_\alpha,\ \alpha \in \Phi,\ h_i,\ 1 \leq i \leq l\}$ eine Chevalley-Basis von L. Dann gilt

(a) $[h_i, h_j] = 0,\ 1 \leq i, j \leq l$.

(b) $[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha,\ 1 \leq i \leq l,\ \alpha \in \Phi$.

(c) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ ist eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination von $h_1, \ldots, h_l$.

(d) Seien $\alpha, \beta \in \Phi$ linear unabhängig, $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ die α-Kette durch β. Dann gilt
- $[x_\alpha, x_\beta] = 0$ für $q = 0$,
- $[x_\alpha, x_\beta] = \pm(r+1)x_{\alpha+\beta}$ für $\alpha + \beta \in \Phi$.

Gitter

Definitionen

Sei $\{x_\alpha,\ \alpha \in \Phi,\ h_i,\ 1 \le i \le l\}$ eine Chevalley-Basis.

- Dann ist
$$L(\mathbb{Z}) := \langle x_\alpha, h_i \mid \alpha \in \Phi, 1 \le i \le l \rangle_{\mathbb{Z}}$$
ein Gitter in L.
- Für $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist das Tensorprodukt
$$L(\mathbb{F}_p) := L(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$$
definiert und bildet eine Lie-Algebra.
- Sei $\mathbb{K}$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{F}_p$. Dann ist
$$L(\mathbb{K}) := L(\mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{K} = L(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}.$$

Bemerkungen

Bemerkungen

- Sei $\alpha \in \Phi, m \in \mathbb{Z}^+$. Dann lässt $(\mathrm{ad}\ x_\alpha^m)/m!$ das Gitter $L(\mathbb{Z})$ invariant.
- Auch

$$\exp \mathrm{ad}\ x_\alpha := 1 + \mathrm{ad}\ x_\alpha + \frac{(\mathrm{ad}\ x_\alpha)^2}{2!} + \dots$$

lässt $L(\mathbb{Z})$ invariant. Dabei ist $\exp \mathrm{ad}\ x_\alpha$ eine endliche Summe.

Chevalley-Gruppen vom adjungierten Typ

Definition

Sei $\mathbb{K}$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{F}_p$. Wir betrachten die Matrixgruppe

$$G(\mathbb{K}) := (\langle \exp \operatorname{ad} cx_\alpha \mid \alpha \in \Phi, c \in \mathbb{K} \rangle, \circ).$$

$G(\mathbb{K})$ heißt *Chevalley-Gruppe (vom adjungierten Typ).*

Beispiel

Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F}_3)$ besitzt als Chevalley-Basis die Matrizen

$$x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Erzeuger der Chevalley-Gruppe bestimmen sich durch Einsetzen von $c \in \mathbb{F}_3$ in

$$a(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2c & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2c^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2c & -c^2 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & 2c & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2c^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 \\ -c^2 & 2c & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Dies liefert die Erzeuger

$$a(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $o(a(1)) = o(a(2)) = o(b(1)) = o(b(2)) = 3$. Wegen $a(2) = a(1)^2$ und $b(2) = b(1)^2$ reicht es $\langle a(1), b(1) \rangle$ zu betrachten. Zusammen mit

$$(a(1) \cdot b(1))^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

erfüllen $a(1)$ und $b(1)$ die Relationen $(a(1))^3 = (b(1))^3 = (a(1)b(1))^2 = 1$ und bilden damit die $\mathrm{Alt}(4) \cong PSL_2(\mathbb{F}_3)$.

Konventionen

Sei im Folgenden

- L eine halbeinfache Lie-Algebra über dem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{F}$ mit $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = 0$,
- H eine Cartan-Unteralgebra von L,
- Φ das Wurzelsystem in H^* über $\mathbb{F}$,
- Δ eine Wurzelbasis von Φ,
- κ die Killing-Form und
- $\{x_\alpha, \alpha \in \Phi, h_i,\ 1 \leq i \leq l\}$ eine Chevalley-Basis von L.

Spezialfall $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ und Lemmata zu Kommutatoreigenschaften

Korollar

Für $b \in \mathbb{Z}^+$ liegt $\binom{h}{b}$ im Unterring $A \leq \mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F}))$, der von $\frac{x^c}{c!}$ und $\frac{y^a}{a!}, a, c \in \mathbb{Z}^+$ erzeugt wird.

Korollar

Sei $L(\mathbb{Z}) := \langle x_\alpha, h_i \mid \alpha \in \Phi, 1 \leq i \leq l \rangle_{\mathbb{Z}}$. Dann gilt für $\alpha \in \Phi, t \in \mathbb{Z}^+$:

$$\frac{(\mathrm{ad}\ x_\alpha)^t}{t!} \text{ lässt } L(\mathbb{Z}) \otimes L(\mathbb{Z}) \otimes \cdots \otimes L(\mathbb{Z}) \text{ invariant.}$$

Satz von Kostant

Sei die Reihenfolge $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ von Φ^+ fest. Mit Tupeln $A = (a_1, \ldots, a_m),\ B = (b_1, \ldots, b_l),\ C = (c_1, \ldots, c_m)$ mit $a_i, b_j, c_i \in \mathbb{Z}^+$ für $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, l$ können die Elemente:

$$f_A = \frac{x_{-\alpha_1}^{a_1}}{a_1!} \cdots \frac{x_{-\alpha_m}^{a_m}}{a_m!},$$

$$h_B = \binom{h_1}{b_1} \cdots \binom{h_l}{b_l},$$

$$e_C = \frac{x_{\alpha_1}^{c_1}}{c_1!} \cdots \frac{x_{\alpha_m}^{c_m}}{c_m!}.$$

definiert werden.

Satz von Kostant

Satz von Kostant

Sei $\mathfrak{U}_\mathbb{Z} := \mathfrak{U}(L)_\mathbb{Z} = \langle x_\alpha^t/t! \mid \alpha \in \Phi, t \in \mathbb{Z}^+\rangle_\mathbb{Z} \leq \mathfrak{U}(L)$ und sei $\mathfrak{B}$ das Gitter in $\mathfrak{U}(L)$ mit

$$\mathfrak{B} = \left\langle f_A h_B e_C \mid A, C \in \left(\mathbb{Z}^+\right)^m,\ B \in \left(\mathbb{Z}^+\right)^l \right\rangle_\mathbb{Z}.$$

Dann ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}_\mathbb{Z}$.

Existenz von zulässigen Gittern

Satz

Sei V ein endlich dimensionaler L-Modul. Dann gilt

(a) Jeder Untermodul M von V, der von $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$ invariant gelassen wird, kann geschrieben werden als

$$M = \bigoplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda \cap M.$$

(b) V besitzt ein unter $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}$ invariantes Gitter.

Definition

Ein Gitter M in einem endlich dimensionalen L-Modul V, das von $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}(= \mathfrak{U}(L)_{\mathbb{Z}})$ invariant gelassen wird, heißt *zulässig*.

Stabilisatoren eines zulässigen Gitters

Proposition

Der globale Stabilisator L_V eines zulässigen Gitters M vom L-Modul V ist ein zulässiges Gitter im L-Modul L. Es gilt

$$L_V = H_V + \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Z} x_\alpha := (H \cap L_V) + \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Z} x_\alpha.$$

Beobachtungen

Sei $V = V(\lambda)$ ein irreduzibler L-Modul, M ein zulässiges Gitter.
Dann gilt:

- M enthält einen maximalen Vektor v^+ und damit enthält M das zulässige Gitter $\mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}.v^+$.
- v^+ ist bis auf Vielfache eindeutig bestimmt. Wir setzen daher $M_{\text{min}} := \mathfrak{U}_{\mathbb{Z}}.v^+$.
- L operiert auf V^* durch

$$L \times V^* \to V^*, \quad (x.f)(w) := -f(x.w), \quad x \in L, \; w \in V, \; f \in V^*.$$

Beobachtungen

- Sei $X \leq V^*$ ein L-invarianter Unterraum von V^*. Dann ist

$$X^{\perp} := \{v \in V \mid f(v) = 0_{\mathbb{F}},\ \forall f \in X\} \leq V$$

  invariant unter L.
- Damit: Aus V irreduzibel folgt, dass auch V^* irreduzibel ist.
- $M^* := \{f \in V^* \mid f(M) \subseteq \mathbb{Z}\}$ ist ein zulässiges Gitter.
- Für zulässige Gitter $M_1 \subseteq M_2$ gilt $M_2^* \subseteq M_1^*$.

Variationen von zulässigen Gittern

Proposition

Sei $V = V(\lambda)$ mit maximalem Vektor v^+.

(a) Jedes zulässige Gitter M mit $M \cap V_\lambda = \mathbb{Z}v^+$ enthält $M_{\text{min}} = \mathfrak{U}_\mathbb{Z}.v^+$.

(b) Jedes zulässige Gitter M mit $M \cap V_\lambda = \mathbb{Z}v^+$ ist in M_{max} enthalten, wobei M_{max} das zu $(M^*)_{\text{min}}$ duale Gitter in V ist.

Konventionen und Definitionen

Sei:

- V ein treuer L-Modul,
- $\Lambda(V) = \langle \lambda \mid \lambda \in H^*, \lambda \text{ ist ein Gewicht von } V \rangle_{\mathbb{Z}}$.
- M ein zulässiges Gitter in V mit globalem Stabilisator

$$L_V = H_V + \coprod_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Z} x_\alpha \text{ in } L.$$

- Es gilt $H_V = \{h \in H \mid \lambda(h) \in \mathbb{Z},\ \forall \lambda \in \Lambda(V)\}$.
- Wir definieren: $V(\mathbb{K}) := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$ und $L_V(\mathbb{K}) := L_V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{K}$.

Bemerkungen

- $L_V(\mathbb{K})$ kann mit einer Lie-Unteralgebra von $\mathrm{End}(V(\mathbb{K}))$ identifiziert werden.
- Die Inklusion $L(\mathbb{Z}) \hookrightarrow L_V$ liefert einen Lie-Algebren Homomorphismus $\psi : L(\mathbb{K}) \to L_V(\mathbb{K})$.
- M wird von $\frac{x_\alpha^t}{t!}$ fest gelassen und $V(\mathbb{K})$ wird von dem korrespondierenden Endomorphismus $x_{\alpha,t}$ stabilisiert.

Konstruktion von Chevalley-Gruppen

Wir definieren

$$\theta_\alpha(1) = \sum_{t=0}^{\infty} x_{\alpha,t} \in \mathrm{End}(V(\mathbb{K})).$$

Allgemein konstruieren wir Automorphismen $\theta_\alpha(T)$ von $V(\mathbb{K})$ durch Bilden von

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(Tx_\alpha)^t}{t!}$$

und Ersetzen der Unbekannten T durch $c \in \mathbb{K}$.

Chevalley-Gruppe vom Typ $\Lambda(V)$

Definition

Das Erzeugnis

$$G_V(\mathbb{K}) := \langle \theta_\alpha(c) \mid \alpha \in \Phi, c \in \mathbb{K} \rangle$$

ist eine Gruppe, genannt eine *Chevalley-Gruppe vom Typ* $\Lambda(V)$.

- $G_V(\mathbb{K})$ heißt *adjungiert*, falls $\Lambda(V) = \Lambda_r = \langle \alpha \in H^* \mid \alpha \in \Phi \rangle_{\mathbb{Z}}$ ist und
- *universell*, falls $\Lambda(V) = \Lambda = \{\mu \in H^* \mid \langle \mu, \alpha \rangle = \frac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z},\ \forall \alpha \in \Phi\}$ ist.

Ende

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Grundlage dieser Arbeit und des Vortrages war das Buch

Introduction to Lie Algebras and Representation Theory

von James E. Humphreys, Springer (1972), New York